**Matrices 6 – El determinante EXPLICADO**

El determinante es un número muy especial que se obtiene a partir de una matriz cuadrada. En un sistema de ecuaciones, este número \*determina\* si existe o no una solución única. Y en general, nos dice si una matriz tiene inversa o no.

Pero, este determinante nunca se explica en profundidad, y termina siendo un número mágico que nadie sabe de dónde viene, por qué se calcula así, y sobre todo, por qué es capaz de decir tanto de una matriz.

Es por esto, que quiero explicarlo en este video.

**PARTE 1: Todo comienza con los sistemas de ecuaciones lineales**

Todo comienza con los sistemas de ecuaciones lineales.

Partamos con sistemas de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (// mostrar x – 2y = 0, 2x - 3y = 1). Como ya sabemos, se pueden resolver con la eliminación de Gauss-Jordan. Casi siempre, podemos encontrar una solución única al sistema.

Pero no siempre pasa eso. Por ejemplo, en este sistema (// mostrar 2x + y = 1, 4x + 2y = 3), si aplicas la eliminación, terminas llegando a que 0 = 1. No existen números x e y que hagan que 0 sea igual a 1. Este sistema es imposible.

Pasa que en el lado izquierdo, la segunda expresión es dos veces la primera, y por eso se canceló, pero no pasa lo mismo con el lado derecho. Sin embargo, si cambias este 3 por un 2, ahora toda la segunda ecuación es el doble de la primera, y si usas la eliminación, obtienes que 0 = 0. Y cualquier par de números x e y hace que 0 sea igual a 0. Entonces, esta ecuación por sí sola ya no nos aporta nada de información, y se descarta, quedándonos solo con la primera. Y en esta ecuación, hay infinitos pares x e y que la cumplen.

En general, si puedes eliminar todo el lado izquierdo de una ecuación, el sistema tiene 0 o infinitas soluciones. Si no es posible hacer eso en ninguna ecuación, el sistema tiene una única solución.

Ahora consideremos un sistema de 2x2 en general: ax + by = k1, y cx + dy = k2. Usemos la eliminación de Gauss-Jordan. Para eso, tendríamos que multiplicar la primera ecuación por -c/a. Pero como los coeficientes pueden ser cualquier número, incluyendo el 0, no podemos llegar y dividir por a. Entonces, multiplicamos la primera por -c, y la segunda por a, y sumamos ambas. Así obtenemos (ad – bc)y = ak2 – k1c. Ahora, podríamos dividir por ad – bc para llegar a la solución, pero no siempre podemos, porque ad – bc podría ser 0.

¿Qué pasa en ese caso? Obtenemos que 0\*y = ak2 – k1c. Si resulta que ak2 – k1c también es igual a 0, entonces obtenemos 0\*y = 0, y cualquier valor de y cumple esta ecuación, porque todo número multiplicado por 0 da 0. En cambio, si ak2 – k1c es distinto de 0, entonces no existe ningún valor de y que haga que esto sea cierto, por lo que no existe ninguna solución al sistema.

Entonces, si ad – bc = 0, puede ocurrir que no existen soluciones al sistema, o existen infinitas. En cambio, si ad – bc es distinto de 0, entonces podemos tomar nuestra última ecuación y dividir por este factor, para llegar a una solución para y. Así podemos encontrar el valor que deben tomar x e y para cumplir todas las ecuaciones. Esta solución es única.

Por ende, el número ad – bc \*determina\* si el sistema tiene solución única o no. Por eso, a ese número le llamamos “determinante”. Si el determinante es 0, el sistema puede tener 0 o infinitas soluciones, pero si es distinto de 0, el sistema tiene una y solo una solución.

// Duda: ¿explicar esto? ¿O no vale la pena?

Graficando las ecuaciones, esto puede tener más sentido. Cada ecuación es una recta en el plano. Todos los puntos en una recta satisfacen la ecuación que corresponde. La intersección entre ambas rectas, o sea el punto que está en ambas rectas al mismo tiempo, satisface ambas ecuaciones a la vez, por lo que resuelve el sistema.

Sin embargo, no siempre se da esta situación. A veces pasa que las rectas son paralelas. En ese caso, nunca se intersectan, por lo que no existe una solución. Y a veces, las rectas coinciden perfectamente, así que todos los infinitos puntos en estas rectas son soluciones del sistema. En general, si ambas rectas tienen la misma pendiente, entonces existen 0 o infinitas soluciones, pero si no, existe solo una solución. La pendiente de la primera sería -a/b, y la de la segunda sería -c/d, así que debemos ver si ambas pendientes son iguales. Ahora, esto funciona solo si las rectas no son verticales. Si una de ellas es vertical, entonces su pendiente se indefine, porque b o d son 0. Para evitar que eso ocurra en esta comparación, debemos multiplicar ambos lados por b y por d. Arreglando la comparación, llegamos a que tenemos que comparar el número ad – bc con 0, que es lo mismo que teníamos antes.

Ahora, todo lo anterior ocurre en sistemas de 2x2. En sistemas más grandes, como 3x3, la cosa se complica más. Antes que nada, permíteme indicar cada coeficiente con una letra con un subíndice. La letra indica la columna y el índice indica la fila donde se encuentra un coeficiente. Al igual que antes, podemos usar la eliminación, multiplicando todas las ecuaciones por factores convenientes y sumando todo. Al final, en la última ecuación, nos queda solo la variable z con un coeficiente. En este coeficiente se cancelan dos términos, y en los demás se puede factorizar un a1, que podemos cancelar. El determinante sería entonces toda esta expresión. Si es distinto de 0, podemos dividir por el determinante y llegar a una solución única. Pero si es igual a 0, no podemos dividir, y tenemos 0 o infinitas soluciones al sistema.

Como puedes ver, este determinante es mucho más grande que el del sistema 2x2, ahora son 6 términos. Si ahora te atreves a resolver un sistema 4x4, encontrarás esta expresión horrible para el determinante, con 24 términos. Para 5x5 es mucho peor: te puedo adelantar que son 120 términos.

Pero en todos los casos hay una idea que se repite. Si logramos cancelar una de las filas del lado izquierdo usando las otras, entonces tenemos dos casos: o nos queda 0 = algo distinto de 0, y en ese caso no existen soluciones, o nos queda 0 = 0, y en ese caso se descarta la ecuación y podríamos tener infinitas soluciones. O sea, el determinante es 0. ¿Y en qué casos una fila se puede cancelar?

Vamos a denotar cada fila de coeficientes en el lado izquierdo, como F\_i. En el caso de 2x2, si una es múltiplo de la otra, entonces se puede cancelar. En el caso de 3x3, más en general, si una de las filas es combinación lineal de las otras, entonces se puede cancelar: solo hay que restarle cada fila escalada por el factor que corresponda. Y esto ocurrirá en cualquier sistema nxn: si una fila es combinación lineal de las otras, entonces el determinante es 0. Esto nos servirá para más adelante.

Ahora, tratemos de buscar patrones en el determinante. En el caso 3x3, podemos ver que todos los términos tienen 3 factores. Más aún, las 3 letras a, b y c aparecen en todos los términos y lo hacen una sola vez, y pasa lo mismo con los subíndices 1, 2 y 3, pero estos están ordenados de maneras distintas. En otras palabras, se están permutando estos índices. Como son 3, existen 1\*2\*3, que son 6 maneras de ordenarlos, y esa es exactamente la cantidad de términos que hay.

Lo anterior nos dice que, como cada término tiene todas las letras sin repetición, debemos mirar este sistema y tomar solo un coeficiente de cada columna. Pero además, como están todos los subíndices sin repetir, todos los coeficientes deben estar en filas distintas. Esto significa que, para generar todos los términos, debemos escoger todas las posibles combinaciones de coeficientes en este sistema, de manera que todas las columnas y filas sean seleccionadas y ninguna se repita. Pero hay un último detalle: la mitad de estos términos tiene un signo menos, algo que parece depender del orden en que se encuentren los índices. Cómo exactamente depende del orden, es algo difícil de deducir, y por ahora voy a saltarme esto.

Ahora, todo lo que dije también ocurre en el caso 2x2, si reescribimos los coeficientes con una letra por columna y un subíndice por fila. Ambos términos contienen una a y una b, y también los índices 1 y 2 que están ordenados de las dos únicas maneras posibles. Además, uno tiene un signo + y el otro un signo –. Algo similar pasa en el caso 4x4, si te das el tiempo de analizarlo.

Si se sigue cumpliendo este patrón para todo n, entonces el determinante de un sistema nxn tendría n! términos de n factores, donde cada uno pertenece a una columna y fila única y sin repetición, y la mitad tendrían un signo –. Pero, ¿podemos demostrar eso? ¿Podemos demostrar que eso siempre se va a cumplir, para todo n? La verdad, eso sería muy difícil. Y es que no sabemos casi nada del determinante hasta ahora. Podemos tratar de encontrar algunas propiedades, como por ejemplo que si tomas un sistema 2x2 y multiplicas una fila por un escalar, puedes notar que el determinante se multiplican por ese escalar. Pero, ¿cómo sabemos que se cumplirá en cualquier sistema nxn, para todo n? Sinceramente, ni yo mismo sabría demostrar nada de eso así como estamos, al menos no directamente. Y puede que esa sea la razón por la que no se explica muy en profundidad el determinante.

El determinante es algo bastante complejo, que se ha estudiado desde varios ángulos posibles durante muchos siglos. Mi idea original era explorar cada uno de esos puntos de vista en varios videos, y luego ir uniendo todas las ideas para tener una idea general del determinante. Pero eso sería demasiado largo, engorroso, y hasta ahora no he encontrado las explicaciones completas, por lo que todos estos caminos tienen agujeros que no he logrado rellenar. Es por eso, que descarté esa idea y decidí ir al grano, tomando un solo camino, el que me permitiera dar la explicación más clara y sencilla posible, con la menor cantidad de agujeros en el camino. Y este es el camino de los vectores. Ahora, algo que no me gusta mucho de este camino, es que al inicio no conecta tan directamente con la idea de los determinantes. Pero confía en mí: todo lo que voy a decir, está relacionado al final.

**PARTE 2: Vectores, producto externo y determinantes**

Volvamos a nuestro primer sistema de 2x2 (// mostrar x – 2y = 0, 2x - 3y = 1). Como ya vimos en un video anterior, esto se puede expresar como una igualdad entre vectores. El lado izquierdo se puede pensar como el resultado de una transformación que toma el vector (x, y) y lo transforma en este vector. Esta transformación es lineal y se puede representar con los coeficientes en el vector salida organizados en una matriz. Por otra parte, el vector salida se puede descomponer en una combinación lineal entre los vectores (1, 2) y (-2, -3), donde los coeficientes son x e y. Recordemos que la combinación lineal entre dos vectores significa escalar cada uno de ellos por un coeficiente, y luego sumar los resultados.

Ahora, con estos dos vectores, si los escalo por un valor adecuado y los sumo, puedo alcanzar cualquier punto en el plano. Por ejemplo, para alcanzar el vector (0, 1), debo escalar el primer vector por 2, el segundo por 1, y sumar ambos resultados. Entonces, la solución al sistema es x = 2, e y = 1. Así mismo puedo formar cualquier vector en este plano, combinando linealmente estos dos vectores. Es decir, el espacio generado por estos dos vectores, el conjunto de todas sus combinaciones lineales, es todo R2.

¿Pero qué pasa con este segundo sistema? Si lo expreso como ecuación vectorial, y miro los vectores (2, 4) y (1, 2), resulta que ambos son paralelos: el primero es el doble del segundo. Entonces, ahora las combinaciones lineales de ambos vectores se encuentran siempre en esta misma recta. Su espacio generado es solo la recta, y no puedo alcanzar ningún vector que se encuentre afuera de ella. En el sistema original, buscamos alcanzar el vector (1, 3). Pero este se encuentra fuera de la recta, así que no existe ningún x e y que cumplan la ecuación. No existen soluciones.

Ahora, si cambiamos ese (1, 3) por un (1, 2), este vector sí pertenece a la recta. Sin embargo, ahora hay infinitas maneras en que podemos combinar los vectores (2, 4) y (1, 2) para alcanzar este vector, por lo que hay infinitas soluciones.

En general, si tomamos un sistema 2x2 genérico y hacemos lo mismo que antes, y analizamos sus vectores columna, hay dos posibilidades:

1. Ninguno de los dos es múltiplo del otro. No son paralelos, y ninguno es el vector 0. En este caso, combinándolos linealmente podemos generar todos los vectores del plano de manera única. Entonces, el determinante es distinto de 0.
2. Uno es múltiplo del otro. Son paralelos, o al menos uno es el vector 0. En este caso no es posible generar todos los vectores del plano, sino de solo una región de este. Si el vector que queremos alcanzar está en esta región, entonces hay infinitas soluciones, pero si no, no existen soluciones. Entonces, el determinante es 0.

Sabiendo todo eso, aquí va una pregunta: ¿hay alguna operación que puedas hacer con 2 vectores, que retorne 0 cuando son paralelos o uno de ellos es 0? Pausa el video y piénsalo.

Si pensaste en el producto cruz, vas por buen camino.

Este producto retorna un vector perpendicular a estos dos, cuya magnitud es el producto de sus magnitudes, por el seno del ángulo entre ambos. Esta magnitud es igual al área del paralelogramo que forman ambos vectores. Entonces, si son paralelos, o si uno de los vectores es 0, el producto es el vector 0.

Ahora, la idea del producto cruz solo funciona en 3D, pero se puede adaptar a 2D. Un vector 3D se puede descomponer en los vectores unitarios base i tongo = (1, 0, 0), j tongo = (0, 1, 0) y k tongo = (0, 0, 1), y el producto cruz tiene estas reglas: cualquier vector cruz consigo mismo da 0, i x j da k, j x k da i, k x i da j, e invertir el orden de los factores agrega un signo – al resultado. Además, preserva la suma de vectores y el producto por escalar, tanto por la izquierda como por la derecha.

Así, si expresamos nuestros vectores como a1i + a2j, y b1i + b2j, podemos multiplicarlos término por término. El resultado es (a1b2 – a2b1)\*k tongo. Esta expresión es idéntica al determinante que ya conocíamos.

Ahora, si has visto los videos anteriores del canal, sabrás que, en vez del producto cruz, prefiero algo llamado “producto externo”. Si no sabes de lo que hablo, te recomiendo ver el video “El producto cruz es un IMPOSTOR – Por qué el PRODUCTO EXTERNO es superior”.

Pero, resumiendo, el producto externo toma dos vectores y retorna un bivector. De la misma manera que un vector es un segmento orientado cuya magnitud es su largo, un bivector es una superficie plana orientada, cuya magnitud es su área. En particular, el producto externo entre dos vectores retorna un bivector con la forma del paralelogramo que forman estos dos vectores, cuya magnitud o área es el producto entre la magnitud de los dos vectores por el seno del ángulo entre ellos, y la orientación de este bivector está dada por el primer vector mencionado. Si se cambia el orden de los factores, se invierte la orientación, así que hay que agregar un signo –.

Las reglas son parecidas a las del producto cruz: un vector consigo mismo da 0, porque no forma un paralelogramo con área. El producto externo preserva la suma de vectores y el producto por escalar, tanto por la izquierda como por la derecha. La diferencia acá, es el producto entre vectores unitarios distintos. i por j es simplemente i por j, i por k es i por k, y j por k es j por k. Estos tres son los bivectores unitarios base, y con ellos se pueden construir los otros bivectores.

Usando este conocimiento, podemos calcular el producto externo entre a1i + a2j y b1i + b2j. El resultado es (a1b2 – a2b1)ij. Es muy parecido a lo que pasaba con el producto cruz, pero vamos a ver que el producto externo es mucho mejor.

Por cierto, con cualquiera de los dos productos, puedes ver que si uno de los dos vectores es solo una versión escalada del otro, se puede factorizar el escalar y, como un vector consigo mismo no forma un paralelogramo con área, el resultado es 0. Es decir, si dos vectores son paralelos, el determinante es 0.

Ahora pasemos a los sistemas 3x3. De nuevo, tenemos que analizar los vectores columna aquí.

Normalmente, estos 3 vectores pueden generar todo el espacio 3D, y todos los vectores en este espacio se pueden expresar de manera única como combinación lineal de los 3 vectores. Aquí, el determinante es distinto de 0.

Pero a veces no pueden generar todo el espacio. Puede pasar, de nuevo, que 2 vectores estén en la misma recta, reduciendo el espacio generado. Pero hay más maneras de que esto pase. Puede ocurrir que los tres vectores se encuentren en un mismo plano. El problema aquí es que basta con dos vectores para generar un plano. Si agregas un tercer vector en el mismo plano, este se puede expresar como una combinación lineal de los otros dos. Este es un caso más general que incluye el caso particular de que dos vectores estén en la misma recta, donde uno de los vectores es múltiplo del otro. En general, si pasa esto de que los 3 vectores no pueden generar todo el espacio, entonces el determinante es 0.

En este caso, ¿cómo podríamos medir si los tres vectores pueden o no generar todo el espacio?

Si en 2 dimensiones vimos el área del paralelogramo formado por los 2 vectores, en 3 dimensiones podríamos tomar los 3 vectores y analizar el volumen del paralelepípedo que forman.

Una forma de obtener el volumen sería usar el producto cruz entre dos vectores, y luego hacer producto punto entre el resultado y el tercer vector. Esto se conoce como “producto mixto”. Es medio extraño, pero funciona. Siguiendo las mismas reglas de antes, el producto cruz entre a y b resulta en esta expresión. Ahora, podemos hacer producto punto entre esto y el vector c. Solo hay que tomar las componentes respectivas, multiplicarlas y sumar todo. Así, obtenemos este resultado, que es el volumen del paralelepípedo, y coincide con el determinante del sistema 3x3.

Pero ya sabes que detesto el producto cruz y prefiero el producto externo. Y es que, en vez de recurrir a rarezas como el producto cruz o el producto mixto, podemos usar el producto externo entre 3 vectores. Si entre 2 vectores retornaba un bivector, un área orientada, entre 3 vectores retorna algo llamado “trivector”, un volumen orientado cuya magnitud es precisamente ese volumen. En este caso, el producto externo entre 3 vectores nos da un trivector con la forma del paralelepípedo que forman los 3 vectores.

Para resolver este producto, debemos saber que en 3 dimensiones el único trivector unitario que existe es i por j por k. Además, el producto externo es asociativo, así que podemos agrupar los factores como queramos. Finalmente, hay que recordar dos factores se pueden intercambiar, y eso invierte el signo de todo el producto, y si se repite un factor, todo el producto es 0.

Entonces, solo debemos multiplicar. Podemos partir con a por b.

El resultado es el siguiente bivector. Ahora multiplicamos este bivector con c.

Para unir todo en una sola expresión, debemos expresar todo como el mismo trivector, y en este caso usaremos como modelo i por j por k. Si es necesario, se deben intercambiar factores para llegar a eso, y eso significa que habrán términos con signo –.

Este es el resultado final, que también coincide con el determinante. Pero el producto externo es mejor para esto que el producto cruz.

Aquí puedes notar que, si uno de los vectores es combinación lineal de los otros dos, entonces el producto se puede distribuir, y en cada uno de los términos hay un factor multiplicándose consigo mismo, así que ambos son igual a 0. Es decir, si uno de los vectores es combinación lineal de los otros dos, el determinante es 0.

Ahora, si nos vamos a más dimensiones, sistemas de 4x4, 5x5, y en general de nxn, la idea es la misma: si existe un vector que se puede expresar como combinación lineal de otros, entonces el determinante es 0, y si no, el determinante es distinto de 0.

Para más de 3 dimensiones, el producto cruz falla, pero nuestro amigo el producto externo está siempre ahí para ayudarnos. Podemos multiplicar 4 vectores para obtener objetos 4D llamados 4-vectores. 5 vectores para obtener 5-vectores, y en general, k vectores para obtener k-vectores. Y la idea sigue siendo la misma: solo hay que desarrollar el producto, y ordenarlo según un k-vector modelo, que sería con los vectores unitarios en orden canónico, y la componente de ese producto sería el determinante.

Como siempre, si un vector es combinación lineal de los restantes, el determinante resulta ser 0.

Al final, podemos concluir que el producto externo es infalible al decir si un sistema nxn tiene solución única o no, sin importar qué tan grande sea la dimensión n. Entonces, de ahora en adelante, digamos que la componente del producto externo \*es\* el determinante.

**PARTE 3: Demostrando las propiedades del determinante**

¿Recuerdas el problema que teníamos al inicio? Era muy difícil demostrar algo del determinante, porque no sabíamos si las reglas que funcionaban en 2 o 3 dimensiones se iban a seguir aplicando para más dimensiones.

Pero ahora estamos usando el producto externo como determinante, y este tiene propiedades muy bien definidas para cualquier espacio de n dimensiones. Así que con eso sí que puedo demostrarte \*todo\* lo que mencioné al inicio.

Partamos con un calentamiento. ¿Recuerdas que en el caso 2x2 se podía ver que si multiplicabas una fila por un escalar, todo el determinante se multiplicaba por ese escalar? Bueno, esa es una de las 3 llamadas “operaciones fundamentales fila”. Son las siguientes: intercambiar dos filas, multiplicar una fila por un escalar, y sumarle a una fila una copia escalada de otra fila. Son las que vimos en el capítulo 2 de esta serie. Pero también se dice, que intercambiar dos filas invierte el signo del determinante. Multiplicar una fila por un escalar multiplica el determinante por ese escalar, y sumarle a una fila una copia escalada de otra fila, no cambia el determinante.

Todo esto te lo puedo demostrar con el producto externo. “Pero momento, si el producto externo trabaja con las columnas, no las filas”. Pues sí, pero ¿recuerdas cuando al inicio dije que una forma de ver si el determinante era 0 era ver si una fila era combinación lineal de las demás? Si ahora decimos que estas filas son “vectores”, entonces esto es lo mismo que hemos estado haciendo hasta ahora, así que también nos sirve usar el producto externo con las filas.

Entonces, la primera operación es la de intercambiar dos filas cualquiera. En el producto externo, si intercambias dos factores adyacentes, entonces el producto se niega. ¿Qué hay de intercambiar dos factores que no son adyacentes? Es un poco más complicado, porque hay que hacer varios intercambios intermedios, y hay que tener ojo. Con 2 intercambios hay doble negación, y eso es un +. Con 3 intercambios es un –, y así se va alternando entre dos signos. En general, si hay una cantidad impar de intercambios, el signo final es –, y si la cantidad es par el signo es +. Por ejemplo, si en este producto de 4 vectores queremos intercambiar el primero con el último, debo hacer 1, 2, 3, 4, 5 intercambios. Como 5 es impar, el signo final es –.

Ahora, imagina que quiero intercambiar dos vectores u y v cualquiera, pero hay m vectores entremedio. Una forma de resolver esto es intercambiar u con los m vectores, que resulta en m intercambios. Luego, intercambiar u con v, y finalmente intercambiar v con los m vectores hasta llevarlo a donde estaba u. En total hubo m + 1 + m intercambios, o sea 2m + 1. Este número \*siempre\* es impar, así que el signo final \*siempre\* es –.

Por ende, intercambiar dos vectores cualesquiera en el producto, siempre termina negándolo. Esto nos lleva a que intercambiar dos filas en la matriz niega su determinante.

Ahora, la segunda operación es la de multiplicar una fila por un escalar. En el producto externo, si se multiplica un vector por un escalar, siempre se puede factorizar este escalar del producto externo. Si este representa el determinante, obtenemos que multiplicar una fila por un escalar implica multiplicar el determinante por el escalar.

Finalmente, la tercera operación, la de sumarle a una fila una copia escalada de otra fila. Si en el producto externo a uno de los factores le sumo una copia escalada de otro factor, entonces como el producto preserva la suma, puedo desarrollarlo en una suma de dos términos. El término que contiene la copia escalada del factor, es 0, porque ese factor está repetido. Por ende, nos quedamos solo con el original. Acabamos de demostrar que sumarle a una fila una copia escalada de otra fila, no cambia el determinante.

Ahora sí, vamos con las demostraciones de verdad. Queremos demostrar que, en un sistema nxn, hay n! términos, cada uno de n factores, que son los coeficientes de la matriz, y que son todas las posibles combinaciones donde hay exactamente 1 coeficiente por fila y por columna.

Voy a hacer el ejemplo con un sistema 3x3, pero esto aplica para cualquier sistema nxn.

Debemos tomar las columnas de la matriz y hacer producto externo entre ellas, y eso significa tomar todas las posibles combinaciones de elementos entre estos vectores. Así, todos los términos resultantes se arman con 1 coeficiente por cada vector. Es decir, con 3 vectores, todos los términos tienen 3 factores. Ahora, todos los términos donde se repite un vector unitario se cancelan, así que solo sobreviven aquellos donde todos los coeficientes se encuentran en filas distintas. (// Mejorar esta parte) Como la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas, esto significa que se está permutando el orden de las filas. Como este producto genera todas las posibles combinaciones de términos, de las cuales solo sobreviven los que son permutaciones de las filas, todas las permutaciones posibles se encuentran aquí, y son 3! o 6 en total. Así, el determinante consiste de 3! términos, y todos estos consisten en 3 factores, cada uno sacado de una columna, donde el orden de las filas se permuta.

Pero hay un último detalle, y es sobre los signos que acompañan a cada término. Al inicio, esta era una duda que quedó sin resolver. Pero ahora, con el producto externo, sí que se puede resolver. Verás, cada coeficiente en cada vector viene acompañado de un vector unitario, que también forma parte del producto externo. Pero en este producto, el orden de los vectores importa. Al desarrollarlo, obtenemos 6 trivectores compuestos de los vectores i, j y k en órdenes diferentes. Ahora, si te fijas, i está asociado a la primera fila, j a la segunda y k a la tercera. Por ende, si las filas se permutaban, entonces i, j y k también se permutan, aparecen en 6 órdenes distintos. El problema es que queremos que todo esté en un mismo orden, en orden canónico, que sería i por j por k. Lo bueno es que podemos intercambiar estos vectores, pero con el costo de que por cada intercambio debemos negar el trivector.

Sabiendo esto, podemos saber cuándo el signo de un término es positivo y cuándo es negativo. Debemos saber cuántas veces tenemos que intercambiar los vectores para dejarlos en el orden correcto, i por j por k. Si se intercambia una cantidad impar de veces, se antepone un signo –. Si es par, se antepone un +.

Ahora, como dije que cada vector unitario estaba a una fila, realmente no necesitamos mirar estos vectores. Podemos mirar las filas, a través de los subíndices de los coeficientes. El único trivector que ya viene en orden canónico, es el que se forma con los elementos en la diagonal, a1, b2 y c3. Es decir, el modelo que tenemos que imitar es el que tiene los subíndices en orden creciente. Los otros términos tienen los números en órdenes distintos, y aquí hay que preguntarse, ¿cuántas veces deberíamos intercambiar estos números para dejarlos en orden creciente? Y de nuevo, si es una cantidad impar debemos anteponer un signo –, y si es par debemos poner un +.

Y es así cómo encontramos que, en el determinante de un sistema nxn, no solo hay n! términos, cada uno con n factores, cada factor sacado de una columna y permutando las filas, sino que el signo que acompaña a cada término depende de cuántas veces se necesitan intercambiar los subíndices para dejarlos en orden creciente, siendo signo – si es impar y signo + si es par.

Con toda esta información, podemos calcular más fácilmente el determinante de cualquier sistema nxn.

“Pero un momento”, me dirás, “esta no es la forma en la que se suele calcular el determinante. Se suele aplicar una regla recursiva medio rara donde lo descomponemos en determinantes más pequeños llamados menores”. Pues adivina: el producto externo también nos sirve para deducir esa regla.

Para ello necesitamos saber el producto externo entre dos vectores de n dimensiones.

Para encontrar el determinante de un sistema de 3x3, con vectores columna a, b y c, primero hagamos producto externo entre a y b.